数理解析研究所講究録
266巻 1976年 319-329

b函数論における，2，3の話題

京大 理　矢野 環

当原稿においては, prehomogeneous vector space
$\binom{G}{V}=SL(5)\times GL(4)$ の, いくつかの orbit における,
$\qquad\quad \boxminus \quad \otimes \quad \square$
localization についてのべる。予稿集においてのべた
いくつかの話題は, いくつかの論文におさめられる。[ ][ ]*
(G, V) の orbit ③' が, $u^4+x_2u^2+x_3u+x_4=0$ の
判別式にすぎず, 又, 5次, 6次, 7次 の判別式も simple で
あることが判明した以後, orbit ④' がまさに5次式の判別
式であることが 佐藤一周 により確認された. 佐藤は又,
一般に, n次式の判別式は simple, しかも, すべての stratum
が simple holonomic set であることを示した。これは, 一般に,
Coxeter 群の基本反不変式に由来するものが, simple である
ことの一例として一般化された[ ]**.

* On the b-functions. , b函数の理論(岩波「数学」) etc.

** Microlocal structure of polynomials associated to Coxeter groups

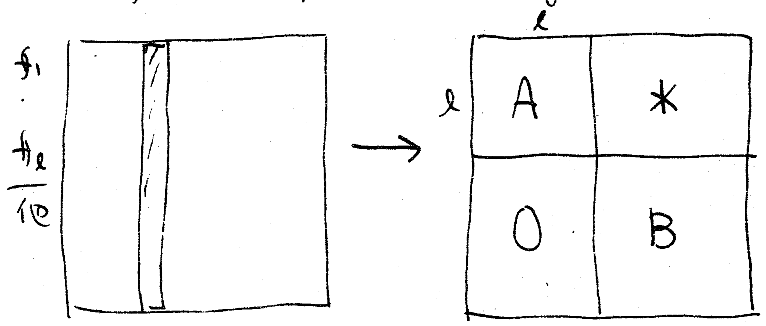
付録　　矢野環，関口次郎

$SL(5)\times GL(4)$ 　のいくつかの orbit における，
日 ⊗ □

localizationの一覧表をここに示す．
表現空間を　$V=\sum_{j=6}^{9} V^5_{日}\otimes u_j$，$V^5=\sum_{j=1}^{5}\mathbb{C}u_j$，$V^5_{日}=\sum\mathbb{C}u_i\wedge u_j$.
ととり　$(u_i\wedge u_j)\otimes u_k$　を　ijk　と略記する。

④'' は　5次式の判別式があらわれ，
⑤'' は　$GL(2)$ の不変式に由来するが，判別式ではない。

これらのlocalizationは，40 × 40 行列を，実際に基本変型を実行することによって，4×4 〜 8×8 行列にしたものである。一般に，codimension ℓ の orbit ℓ にたいして，generic point e_0，transversal な方向 $f_1,\cdots,f_\ell$ をとり，
$e_0+x_1f_1+\cdots+x_\ell f_\ell$　に対する $\mathfrak{g}$ の作用を 40×40 行列で表示し，



それを右のように変型すれば，(ただし $\det B\neq 0$) Aが，ℓ におけるもとめる $\mathfrak{g}$ の作用を表示している。
以下に示す Lie 環の basis は，すべて free basis である．
cf［ ］.

4'') 佐藤，関口 文献.

generic pt. $256+247+357-348-158+149-239$.

conormal 136, $-126+137$, $146+236+127+138$, $2\cdot 156-2\cdot 346-147-237+128+139$

g.pt. $+\ 13\otimes(x_2 9 + x_3 8 + x_4 7 - x_5 6)$

$f_{\mathrm{bar}}(x_2, x_3, x_4, x_5)$ = discriminant of $u^5 + x_2 u^3 + x_3 u^2 + x_4 u + x_5$

X_0	X_1	X_2	X_3
$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_5$
$3x_3$	$4x_4 - \frac{6}{5}x_2^2$	$5x_5 - \frac{4}{5}x_2x_3$	$-\frac{2}{5}x_2x_4$
$4x_4$	$5x_5 - \frac{4}{5}x_2x_3$	$2x_2x_4 - \frac{6}{5}x_3^2$	$3x_2x_5 - \frac{3}{5}x_3x_4$
$5x_5$	$-\frac{2}{5}x_2x_4$	$3x_2x_5 - \frac{3}{5}x_3x_4$	$2x_3x_5 - \frac{4}{5}x_4^2$

尚，X_0 はもとの $SL(5)\times GL(4)$ の Lie 環の元の

$$E_{44} + 2E_{22} + 3E_{33} + 4E_{11} - (2E_{66} + 3E_{77} + 4E_{88} + 5E_{99})$$

に対応している。 $[X_0,\ ]$ は weight が出るのみ.

$$[X_1, X_2] = \frac{4}{5}x_3X_0 - \frac{4}{5}x_2X_1 + X_3$$

$$[X_1, X_3] = \frac{2}{5}x_4X_0 - \frac{2}{5}x_2X_2$$

$$[X_2, X_3] = -x_5X_0 + \frac{3}{5}x_4X_1 - \frac{3}{5}x_3X_2 + x_2X_3.$$

⑤''' 矢野

generic pt. $356 + 137 - 457 + 258 + 348 + 149 + 239$

conormal $126,\ 246,\ 236 - 146 + 247,\ 256 - 346 + 248 - 2\cdot 127,$

$136 + 456 + \frac{1}{2}(-147 + 237 - 249 - 3\cdot 128)$

gen. pt $+ \ (x\cdot 13 + y\cdot 25 + z\cdot 23 + u\cdot 12 + v\cdot 24)\otimes 6$ ととれば,

$$f_{loc} = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y & 4z & 5u & 6v \\ 3y & 3z - 3x^2 & -20u - 2xy & -4v + 4xz - y^2 & 12xu + yz \\ 4z & -5u - 2xy & 12v - 4xz & -6xu & 4(z^2 + 4yu + 2xv) \\ 5u & -v + xz & -6xu & yu & -uz \\ 6v & 3xu & 4(z^2 + 4uy + 2xv) & -zu & -2\begin{pmatrix} 10u^2 - 4zv - 4x^2v \\ -xz^2 - 4xyu \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

gen. pt $+ \ (\frac{2}{3}x_2\cdot 13 + x_3\cdot 25 + \frac{4}{3}x_4\cdot 23 - \frac{4}{3}x_5\cdot 12 + 8x_6\cdot 24)\otimes 6$ ととれば,

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 2x_2 & 3x_3 & 4x_4 & 5x_5 & 6x_6 \\ 3x_3 & 4x_4 - \frac{4}{3}x_2^2 & \frac{40}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_2x_3 & 16x_6 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{16}{9}x_2x_4 & -\frac{8}{9}x_2x_5 + \frac{1}{9}x_3x_4 \\ 4x_4 & 5x_5 - x_2x_3 & 36x_6 - \frac{4}{3}x_2x_4 & -2x_2x_5 & \frac{4}{9}x_4^2 - \frac{4}{3}x_3x_5 + \frac{8}{3}x_2x_6 \\ 5x_5 & 6x_6 - \frac{2}{3}x_2x_4 & -2x_2x_5 & -\frac{1}{2}x_3x_5 & -\frac{1}{9}x_4x_5 \\ 6x_6 & -\frac{1}{3}x_2x_5 & \frac{4}{9}x_4^2 - \frac{4}{3}x_3x_5 + \frac{8}{3}x_2x_6 & -\frac{1}{9}x_4x_5 & +\frac{2}{27}\begin{pmatrix} -5x_5^2 + 12x_4x_6 + 4x_2^2x_6 \\ +\frac{1}{3}x_2x_4^2 - x_2x_3x_5 \end{pmatrix} \end{array}$$

となり, ここで X_0, X_1 は 6次式の discriminant と共通である。

$[X_0,\ ]$ は weight のみ出る.

$$[X_1, X_2] = -4X_3 - \tfrac{2}{3}x_2X_1$$
$$[X_1, X_3] = -3X_4 + \tfrac{1}{3}x_2X_2 - \tfrac{1}{2}x_3X_1 + \tfrac{1}{3}x_4X_0$$
$$[X_1, X_4] = \tfrac{1}{6}x_3X_2 - \tfrac{1}{3}x_4X_1 + \tfrac{1}{3}x_5X_0$$
$$[X_2, X_3] = -\tfrac{2}{3}x_2X_3 + \tfrac{2}{3}x_5X_0$$
$$[X_2, X_4] = \tfrac{2}{9}x_4X_2 - \tfrac{8}{9}x_5X_1 + \tfrac{8}{3}x_6X_0$$
$$[X_3, X_4] = -\tfrac{1}{9}x_4X_3 + \tfrac{1}{9}x_5X_2$$

discriminant の場合と，およそ異なっている。

$\mathfrak{g}[\Delta]$ は $X_0 - 30s$, X_1, $X_2 + \frac{4}{3}x_2 s$, $X_3 - x_3 s$, $X_4 - (2x_4 + \frac{8}{27}x_2^2)s$ で生成される。

6次式の discriminant の Lie 環の basis を $\mathring{X}_0\ \mathring{X}_1\ \mathring{X}_2\ \mathring{X}_3\ \mathring{X}_4$ として，上のものと差をとれば，$X_0 = \mathring{X}_0$，$X_1 = \mathring{X}_1$ に加え，著しい関係がある。即ち，$A = 30x_6 - \frac{10}{3}x_2x_4 + \frac{3}{2}x_3^2$，$B = -5x_2x_5 + x_3x_4$

$C = -\frac{4}{3}x_2x_6 - \frac{5}{6}x_3x_5 + \frac{4}{9}x_4^2$，$D = -3x_3x_6 + \frac{1}{3}x_4x_5$ とおけば，（関口による指摘）

$$X_2 - \mathring{X}_2 = \left(\tfrac{25}{3}x_5 + \tfrac{1}{3}x_2x_3\right)D_3 + AD_4 + BD_5 + CD_6$$
$$X_3 - \mathring{X}_3 = \tfrac{1}{3}AD_3 + BD_4 + 3CD_5 + DD_6$$
$$X_4 - \mathring{X}_4 = \tfrac{1}{9}BD_3 + CD_4 + DD_5 + \left(-\tfrac{10}{9}x_4x_6 + \tfrac{8}{27}x_2^2x_6 + \tfrac{25}{54}x_5^2 - \tfrac{2}{27}x_2x_3x_5 + \tfrac{2}{81}x_2x_4^2\right)D_6$$

これらの事情について，詳細は［ ］を参照せよ。

⑥' 矢野

generic pt $356 + 137 + 158 + 248 + 149 + 239$.

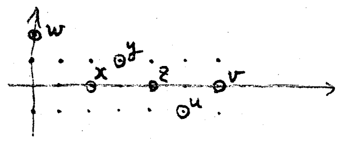
conormal $126,\ 256 - 127,\ 257,\ 157 - 247 - 259,\ 457,$

$258 + 249 - 159 - 2\cdot 237 + 2\cdot 147 - 3\cdot 456$

gen.pt $+\ (x\cdot 23 + y\cdot 12 + z\cdot 24 + u\cdot 45 + v\cdot 25)\otimes 7 + w\cdot 126$

X_{01}	X_{10}	X_{11}	X_{20}	X_{3-1}	X_{40}
$2x$		$2y$	$2z$	$5u$	$6v$
$3y$	y	$3w(z-x^2)$	$-xy-10uw$	$-4v+4xz$	$12xuw+yz$
$4z$		$-5uw-2xy$	$6v-2xz$	$-6ux$	$4(z^2+4uy+2xv)$
$5u$	$-u$	$-v+xz$	$-3xu$		$-uz$
$6v$		$3xuw$	$2(z^2+4uy+2xv)$	$-uz$	$-2\begin{pmatrix}10u^2w-4vz-4x^2v\\ -xz^2-4xyu\end{pmatrix}$
	$2w$			$2y$	

2重の weight をもつ, diagram は



$[X_{11}, X_{20}] = -y X_{10} - 2x X_{11} + 4w X_{3-1}$

$[X_{11}, X_{3-1}] = -\frac{1}{2} z X_{01} + 3(z-x^2) X_{10} - x X_{20} + \frac{1}{2} X_{40}$

$[X_{11}, X_{40}] = -3uw X_{01} - 3z X_{11} + 2y X_{20}$

$[X_{20}, X_{3-1}] = u X_{01} - 10u X_{10} - x X_{3-1}$

$[X_{20}\ X_{40}] = 4v X_{01} + 8u X_{11} + 2z X_{20}$

$[X_{3-1}, X_{40}] = -12xu X_{10} + 2u X_{20} - z X_{3-1}$

($w=1$ とすれば 全く ⑤'' と同じである)

(6'''') 矢野

generic pt. 136 + 147 + 158 + 237 + 248 + 259

conormal 456, 457−356, 458+346−357, 459+347−358, 348−359, 349.

gen. pt + $(x_0 45 + x_1 35) \otimes 6 + 34 \otimes (x_2 6 - x_3 7 + x_4 8 - x_5 9)$

X_{-1}	X_0'	X_0	X_1	X_2	X_3
	$5x_0$		x_1	$2x_0x_1$	
$5x_0$	$4x_1$	x_1	$2x_2$	$3x_0x_3 + x_1x_2$	$4x_0x_4$
$4x_1$	$3x_2$	$2x_2$	$3x_3$	$4x_0x_4 + 2x_1x_3$	$3x_1x_4 + 5x_0x_5$
$3x_2$	$2x_3$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_0x_5 + 3x_1x_4$	$2x_2x_4 + 4x_1x_5$
$2x_3$	x_4	$4x_4$	$5x_5$	$4x_1x_5$	$x_3x_4 + 3x_2x_5$
x_4		$5x_5$			$2x_3x_5$.

$GL(2)$ より.

f_{loc} = discriminant of $x_0u^5 + x_1u^4 + x_2u^3 + x_3u^2 + x_4u + x_5$.

$[X_0, X_\nu] = \nu X_\nu \qquad [X_0', X_\nu] = \underset{\nu=-1}{X_{-1}},\ \underset{1}{-X_1},\ \underset{2}{3X_2},\ \underset{3}{2X_3}$

$[X_0, X_0'] = 0$

$[X_1, X_2] = X_3 \qquad + x_2X_1 - \frac{2}{5}x_3X_0 + \frac{3}{5}x_3X_0'$

$[X_1, X_3] = \qquad -\frac{6}{5}x_4X_0 - \frac{4}{5}x_4X_0' + 2x_5X_{-1}$

$[X_{-1}, X_2] = \qquad 2x_0X_1 - \frac{4}{5}x_1X_0 + \frac{6}{5}x_1X_0'$

$[X_{-1}, X_3] = \quad X_2 \qquad + \frac{3}{5}x_2X_0 - \frac{2}{5}x_2X_0' + x_3X_{-1}$

$[X_2, X_3] =$

(7″) 関口 矢野

generic pt $356+137+128+458+149+239$

conormal $246,\ 247,\ 257,\ 157-259,\ 256-127+457,\ 236-248+347-146$

$2\cdot 456-2\cdot 126-147+237-249$

gen. pt $+\ (x_{20}15+x_{11}23+x_{22}24+x_{31}25+x_{01}34+x_{21}45)\otimes 7+x_{12}246$

$X_{00}^{(1)}$	$X_{00}^{(2)}$	X_{10}	X_{01}	$X_{11}^{(1)}$	$X_{11}^{(2)}$	X_{21}
	$2x_{20}$		$x_{21}+x_{20}x_{01}$	$x_{31}-x_{20}x_{11}$	$-x_{31}+x_{20}x_{11}$	$2x_{20}x_{21}$
x_{01}		$\frac{1}{2}x_{11}$		$-3x_{12}$	$-(2x_{12}+\frac{1}{2}x_{11}x_{01})$	$-(2x_{22}+\frac{1}{2}x_{11}^2+2x_{01}x_{21})$
x_{11}	x_{11}	$3x_{21}+\frac{5}{2}x_{20}x_{01}$	$5x_{12}$	$-2x_{22}$	$-(2x_{22}+\frac{1}{2}x_{01}x_{21})$	$\frac{3}{2}x_{31}x_{01}+7x_{12}x_{20}$
x_{21}	$2x_{21}$	$\frac{5}{2}x_{31}-3x_{20}x_{11}$	$2x_{22}$	$5x_{12}x_{20}$	$2x_{12}x_{20}+x_{11}x_{21}+\frac{1}{2}x_{31}x_{01}$	$4x_{20}x_{22}+\frac{1}{2}x_{11}x_{31}$
x_{31}	$3x_{31}$	$\frac{1}{2}x_{20}x_{21}$	$3x_{12}x_{20}$		$\frac{1}{2}x_{21}^2-2x_{22}x_{20}$	$\frac{1}{2}x_{31}x_{21}+5x_{12}x_{20}^2$
$2x_{12}$	x_{12}	x_{22}	$-2x_{12}x_{01}$	$2x_{12}x_{11}$	$x_{12}x_{11}$	
$2x_{22}$	$2x_{22}$	$-\begin{pmatrix}2x_{31}x_{01}+x_{12}x_{20}\\+2x_{11}x_{21}\end{pmatrix}$	$-3\begin{pmatrix}x_{12}x_{11}\\+x_{01}x_{22}\end{pmatrix}$	$3x_{12}x_{21}+x_{11}x_{22}$	$\begin{pmatrix}x_{11}x_{22}+\frac{5}{2}x_{12}x_{21}\\+\frac{1}{2}x_{12}x_{20}x_{01}\end{pmatrix}$	$\frac{5}{2}x_{12}x_{31}-\frac{11}{2}x_{12}x_{20}x_{11}$

$X_{00}^{(1)}$ は添字第2の weight を示し、$X_{00}^{(2)}$ は第1のものを示す.

$g[s]$ は $X_{00}^{(1)}-12s$, $X_{00}^{(2)}-16s$, X_{10}, $X_{01}+2x_{01}s$, $X_{11}^{(1)}-2x_{11}s$,

$X_{11}^{(2)}-4x_{11}s$, $X_{21}+2x_{21}s$ で生成される。

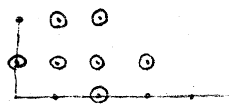
principal symbol は $\xi_{20}^{-8s-\frac{11}{2}}\xi_{01}^{-12s-8}\sqrt{d\xi}$ であり、

$b(s)$ の factor $s+\frac{2}{3}$ (これは Lie 環から知られていないもの)

に対する固有函数は、$D_{20}^{-\frac{1}{6}}\delta(x)$ である.

	$X_{00}^{(1)}$	$X_{00}^{(2)}$	X_{10}	X_{01}	$X_{11}^{(1)}$	$X_{11}^{(2)}$	X_{21}
$[X_{10}, X_{01}] =$			$-x_{01}$		$\frac{3}{2}$	-1	
$[X_{10}, X_{11}^{(1)}] =$	$2x_{21}$	$-x_{21}$	x_{11}	$-\frac{5}{2}x_{20}$			1
$[X_{10}, X_{11}^{(2)}] =$	$-\frac{1}{4}(x_{21}+x_{01}x_{20})$	$x_{21}+\frac{3}{2}x_{01}x_{20}$		$-\frac{1}{2}x_{20}$			$\frac{1}{2}$
$[X_{10}, X_{21}] =$	$-\frac{7}{4}x_{31}+\frac{11}{4}x_{20}x_{11}$	$x_{31}-\frac{3}{2}x_{20}x_{11}$			$\frac{3}{2}x_{20}$	$-\frac{3}{2}x_{20}$	
$[X_{01}, X_{11}^{(1)}] =$	$3x_{12}$	$-2x_{12}$		$-x_{11}$	$-x_{01}$		
$[X_{01}, X_{11}^{(2)}] =$		x_{12}			$-\frac{1}{2}x_{01}$		
$[X_{01}, X_{21}] =$	$-2x_{22}, X_{00}^{(1)}$	x_{22}	$-x_{12}$	$2x_{21}$	$-\frac{1}{2}x_{11}$		
$[X_{11}^{(1)}, X_{11}^{(2)}] =$	$2x_{22}$	$-x_{22}$	x_{12}	$-\frac{1}{2}x_{21}$			
$[X_{11}^{(1)}, X_{21}] =$	$\frac{9}{4}x_{31}x_{01}-10x_{12}x_{20}-\frac{11}{4}x_{20}x_{01}x_{11}$	$6x_{12}x_{20}+\frac{3}{2}x_{20}x_{11}x_{01}-x_{31}x_{01}$		$\frac{3}{2}x_{31}$	$-\frac{3}{2}x_{01}x_{20}$	$\frac{3}{2}x_{01}x_{20}$	
$2[X_{11}^{(2)}, X_{21}] =$	$-\frac{11}{4}x_{31}x_{01}-8x_{12}x_{20}-\frac{1}{2}x_{11}x_{21}-\frac{1}{4}x_{20}x_{11}x_{01}$	$2x_{12}x_{20}+x_{31}x_{01}+\frac{3}{2}x_{20}x_{11}x_{01}$		$-2x_{31}+x_{20}x_{11}$	$-\frac{1}{2}x_{01}x_{20}$	$x_{21}+\frac{3}{2}x_{01}x_{20}$	x_{11}

weight の diagram は



であるが，Lie 環の構造は上にみるようにかなり複雑である。

7''' 矢野

generic pt. 137 − 457 + 258 + 348 + 149 + 239

conormal

gen. pt + $(x_0 \cdot 35 + \frac{1}{3}x_1 \cdot 15 + \frac{2}{3}x_2 \cdot 13 + x_3 25 + \frac{4}{3}x_4 23 - \frac{4}{3}x_5 12 + 8x_6 24) \otimes 6$

X_{-1}	X_0'	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
	$6x_0$		x_1	$-\frac{1}{3}x_0x_2 - \frac{2}{9}x_1^2$	$\frac{1}{9}x_1x_2$	$\frac{1}{9}x_2^2 - \frac{1}{3}x_1x_3 + \frac{4}{3}x_0x_4$
$6x_0$	$5x_1$	x_1	$2x_2$	$-\frac{2}{3}x_1x_2$	$\frac{1}{2}x_1x_3$	$2x_0x_5$
$5x_1$	$4x_2$	$2x_2$	$3x_3$	$+x_0x_4 - x_1x_3$	$2x_1x_4 - 5x_0x_5$	$9x_0x_6 - \frac{2}{3}x_1x_5$
$4x_2$	$3x_3$	$3x_3$	$4x_4$	$\frac{10}{3}x_0x_5 - \frac{10}{9}x_1x_4$	$\frac{4}{9}x_1x_5 - 16x_0x_6 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{16}{9}x_2x_4$	$\frac{10}{3}x_1x_6 - \frac{10}{9}x_2x_5$
$3x_3$	$2x_4$	$4x_4$	$5x_5$	$9x_0x_6 - \frac{2}{3}x_1x_5$	$-5x_1x_6 + 2x_2x_5$	$x_2x_6 - x_3x_5$
$2x_4$	x_5	$5x_5$	$6x_6$	$2x_1x_6$	$\frac{1}{2}x_3x_5$	$-\frac{2}{3}x_4x_5$
x_5		$6x_6$		$\frac{1}{9}x_4^2 - \frac{1}{3}x_3x_5 + \frac{4}{3}x_2x_6$	$\frac{1}{9}x_4x_5$	$-\frac{1}{3}x_4x_6 - \frac{2}{9}x_5^2$

$GL(2)$ より.

$f_{loc}(x)$ は 上の 7×7 行列の determinant であり，$GL(2)$ の invariant になっている。10次式，weight 30.

上記 X_2 と X_4，又 X_3 自身は $x_\nu \to x_{6-\nu}$ でうつりかわるよう対称性をもたせてあるが，他に reasonable なとり方があるかもしれない。

⑧ 矢野 関口.

generic pt. $256+347-158+149$

wnormal $238,\ 239,\ 236+138,\ 237+129,\ 248,\ 359,\ 136,\ 127$

$$\text{gen.pt} + x_{5000}\,136 - x_{0500}\,248 - x_{0050}\,359 + x_{0005}\,127 +$$
$$+ x_{4321}\,138 + x_{3642}\,238 + x_{2463}\,239 + x_{1234}\,129.$$

$X_0^{(1)}$	$X_0^{(2)}$	$X_0^{(3)}$	$X_0^{(4)}$	X_{-1321}	X_{3142}	X_{2413}	X_{13-1}
$5x_{5000}$				x_{4321}			
	$5x_{0500}$				x_{3642}		
		$5x_{0050}$				x_{2463}	
			$5x_{0005}$				x_{1234}
$4x_{4321}$	$3x_{4321}$	$2x_{4321}$	x_{4321}	$2x_{3642}$	$3x_{5000}x_{2463}$	$4x_{5000}x_{0500}x_{1234}$	$5x_{5000}x_{0500}x_{0050}$
$3x_{3642}$	$6x_{3642}$	$4x_{3642}$	$2x_{3642}$	$3x_{0500}x_{2463}$	$2x_{4321}x_{2463} + 4x_{5000}x_{0500}x_{0050}x_{1234}$	$3x_{0500}x_{4321}x_{1234} + 5x_{5000}x_{0500}^2x_{0050}x_{0005}$	$4x_{0500}x_{0050}x_{4321}$
$2x_{2463}$	$4x_{2463}$	$6x_{2463}$	$3x_{2463}$	$4x_{0500}x_{0050}x_{1234}$	$3x_{0050}x_{4321}x_{1234} + 5x_{5000}x_{0500}x_{0050}^2x_{0005}$	$4x_{0500}x_{0050}x_{0005}x_{4321} + 2x_{3642}x_{1234}$	$3x_{0050}x_{3642}$
x_{1234}	$2x_{1234}$	$3x_{1234}$	$4x_{1234}$	$5x_{0500}x_{0050}x_{0005}$	$4x_{0050}x_{0005}x_{4321}$	$3x_{0005}x_{3642}$	$2x_{2463}$

$$[X_{-1321}, X_{3142}] = \frac{1}{5}x_{2463}\left(-3X_0^{(1)} + 3X_0^{(2)} - X_0^{(3)}\right) + x_{0050}X_{2413}$$

$$[X_{-1321}, X_{2413}] = \frac{1}{5}x_{0500}x_{1234}\left(-4X_0^{(1)} + 4X_0^{(3)} - 2X_0^{(4)}\right) + 2x_{0500}x_{0005}X_{123-1}$$

$$[X_{-1321}, X_{123-1}] = x_{0500}x_{0050}\left(-X_0^{(1)} + X_0^{(4)}\right)$$

$$[X_{3142}, X_{2413}] = \frac{1}{5}x_{1234}x_{4321}\left(X_0^{(1)} - 3X_0^{(2)} + 3X_0^{(3)} - X_0^{(4)}\right)$$
$$+ x_{5000}x_{0500}x_{0050}x_{0005}\left(-X_0^{(2)} + X_0^{(3)}\right) - x_{5000}x_{1234}X_{-1321} + x_{0005}x_{4321}X_{123-1}$$

他は対称性から従う.